Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

7 класс

2024-2025 учебный год

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.



Необходимо учитывать следующее:

1. По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;
2. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;
3. Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;
4. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;
5. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
6. Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

7.1. Найдите величину угла между часовой и минутной стрелками в 20 часов 24 минут 1 января 2025 года.

Ответ. 108°.

Решение. В 20 часов и 24 минут угол между часовой и минутной будет такой же, как и в 8 часов 24 минуты.

1) 360°:12=30° – проходит часовая стрелка за 1ч;

2) 30°·24/60=12° – пройдёт часовая стрелка за 24 минут;

4) 8·30° +12° =262° – пройдёт часовая стрелка за 8 часов 24 минут;

5) 360°/ 60=6° – пройдёт минутная стрелка за 1 минуту;

6) 6°·24=144° – пройдет минутная стрелка за 24 минут;

7) 262°–144° =108° – между часовой и минутной стрелками в 20 часов 14 минут

7.2. В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

Ответ. 132

Решение. Очевидно, что это те дни, у которых дата может быть номером месяца, т.е. принимает значения от 1 до 12. Таких дней 12·12=144. Но те дни, у которых число совпадает с номером месяца, понимаются однозначно. Таких дней 12. Поэтому искомых дней 144-12=132.

7.3. Из прямоугольника 8×10 вырезали одну из внутренних клеток, а оставшиеся клетки разрезали на 7 частей по линиям клеток. Докажите, что из этих частей нельзя сложить прямоугольник.

Доказательство. После того, как из прямоугольника вырезали одну клетку, в нем осталось 79 клеток. 79 - простое число, значит единственный вариант прямоугольника площадью 79 клеток - 79х1. Чтобы получить такой прямоугольник, нужно получить каждым разрезанием полоски шириной в 1 клетку. Длина каждой полоски не более 10 клеток, поэтому обойтись 7 фигурами нельзя.

7.4. Найдите последнюю цифру числа 12 + 22 + ... + 992.

Ответ. 0

Решение.

12 + 22 + ... + 992 = (02 + 12 + ... +92) + (102 + 112 + ... + 192) + … + (902 + 912 + … + 992)

Заметим, что у каждой суммы в скобках одна и та же последняя цифра, а поскольку их 10, то у всей суммы последняя цифра 0.

7.5. Найти все целые числа *n*, для которых выполняется равенство
(*n*–1)(*n*–3)(*n*–5)...(*n*–2023) = (*n*+2)(*n*+4)(*n*+6)...(*n*+2024).

Ответ. Таких *n* не существует.

Решение. Заметим, что множители в правой части равенства одной четности, и множители в левой части равенства одной четности. Но четности множителей в правой и левой частях равенства разные.

Если предположить, что *n -* четное, то (*n*+2)(*n*+4)(*n*+6) ·... · (*n*+2024) - четное число,
а (*n*–1)(*n*–3)(*n*–5) ·... · (*n*–2023) - нечетное. Если *n -* нечетное, то (*n*+2)(*n*+4)(*n*+6) ·... · (*n*+2024) - нечетное число, а (*n*–1)(*n*–3)(*n*–5) ·... · (*n*–2023) - четное.

Так же невозможен случай, когда одна из частей равна нулю.

Значит таких *n* не существует.

***Всероссийская олимпиада школьников по математике.***

***8 класс. Муниципальный этап. 2024 – 2025г.***

1. Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2024. Составлять числа из цифр нельзя.
2. В средневековом замке собрались 8 человек: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы лгут. Один из собравшихся сказал: здесь нет ни одного рыцаря. Второй сказал: «Здесь не больше одного рыцаря». Третий сказал: «Здесь не более двух рыцарей» и т.д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи рыцарей». Сколько в замке рыцарей? Ответ обоснуйте.
3. Всем хорошо известны легендарные путешествия Синдбада – морехода. Во время одного из путешествий он попадает на небольшой остров, который населяли не только люди, но и фэнтезийные существа и все они жили в мире и согласии. Остров был полон загадок и поэтому на вопрос о количестве жителей на этом острове, ему ответили так: Количество жителей невелико, но оно стремительно растёт. За первый год население (количество людей) возросло на n человек, а за второй на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй – на n %. Сколько же сейчас людей населяет остров? (Для справки: речь идёт именно о людях, количество мифических существ на острове не меняется)
4. В произвольном треугольнике АВС провели две биссектрисы углов А и С. Из вершины В провели перпендикуляры к этим биссектрисам. Точками P и Q обозначили основания этих перпендикуляров. Докажите, что отрезок PQ – параллелен стороне АС.
5. У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых есть 2 фальшивые – они легче, чем остальные и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?

**Решение олимпиадных задач и критерии оценивания**

**Задача №1**

Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2024. Составлять числа из цифр нельзя.

***Решение:***$\left(5∙\left(7+3\right)∙\left(9+1\right)+6\right)∙8∙2 :4$

|  |  |
| --- | --- |
|  *Баллы*  | *Критерии оценивания решения*  |
| 7  |  Дан верный ответ с обоснованием (есть способ рассуждений). |
| 6 | Дан верный ответ без обоснования.  |
| 0  | Нет решения. |

**Задача №2**

В средневековом замке собрались 8 человек: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы лгут. Один из собравшихся сказал: здесь нет ни одного рыцаря. Второй сказал: «Здесь не больше одного рыцаря». Третий сказал: «Здесь не более двух рыцарей» и т.д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи рыцарей». Сколько в замке рыцарей? Ответ обоснуйте.

***Решение:* Ответ: 4**

Начнём рассуждения с высказывания восьмого человека: «Здесь не больше 7 рыцарей». Если восьмой – рыцарь, то все хорошо. Если – он лжет, то в комнате 8 рыцарей, что противоречит тому, что восьмой – лжец. Значит, восьмой не может лгать, значит – он рыцарь. Первый сказал, что в комнате нет рыцарей. Но восьмой – рыцарь, поэтому – первый солгал. Значит, первый – лжец. Рассматривая высказывание седьмого человека, получим, что он не может быть лжецом. Иначе в замке должно быть 7 или 8 рыцарей. Но первый – лжец. Поэтому седьмой будет рыцарь. Рассуждая далее аналогично, получим, что второй, третий и четвертый будут лжецами, а шестой и пятый – рыцари. Тогда в замке будет 4 рыцаря.

|  |  |
| --- | --- |
|  *Баллы*  | *Критерии оценивания решения*  |
| 7 - 6 | Верный ответ с полным подробным решением.  |
| 5 - 4 | Дан верный ответ, но решение содержит неточности, или недостаточно обосновано, но при этом идея решения понятна и верна.  |
| 3 - 2 | Дан верный ответ, сделаны попытки кратко обосновать свой ответ, или ответ неверный, но при этом описана идея решения и она верна. |
| 1  | Дан верный ответ при отсутствии решения. |
| 0  | Дан неверный ответ без обоснования или решение и ответ отсутствуют. |

**Задача №3**

Всем хорошо известны легендарные путешествия Синдбада – морехода. Во время одного из путешествий он попадает на небольшой остров, который населяли не только люди, но и фэнтезийные существа и все они жили в мире и согласии. Остров был полон загадок и поэтому на вопрос о количестве жителей на этом острове, ему ответили так: Количество жителей невелико, но оно стремительно растёт. За первый год население (количество людей) возросло на n человек, а за второй на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй – на n %. Сколько же сейчас людей населяет остров? (Для справки: речь идёт именно о людях, количество мифических существ на острове не меняется)

***Решение:* Ответ: 500 человек**

Пусть на острове х жителей. Тогда через год стало

жителей, откуда n = 3х. еще через год на острове стало 4х + 300 = 4х + $\frac{n}{100}∙4х$ жителей. Откуда 300 = $\frac{4nx}{100}$. Так как n = 3х, то 300 = $\frac{12х^{2}}{100}$, $4х^{2}=10000; х=50$. Значит на острове сейчас 4х + 300 = 500 человек.

|  |  |
| --- | --- |
|  *Баллы*  | *Критерии оценивания решения*  |
| 7  | Полное верное решение.  |
| 6 - 5 | Дан неверный ответ, из – за вычислительные ошибки или описки, недочета. Идея решения понятна и верна.  |
| 4 - 3 | Ответ верный. Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после дополнений.(или при наличии вычислительной ошибки) |
| 1  | Дан верный ответ при отсутствии решения и сделана проверка по условию задачи. |
| 0  | Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют. |

**Задача №4**

В произвольном треугольнике АВС провели две биссектрисы углов А и С. Из вершины В провели перпендикуляры к этим биссектрисам. Точками P и Q обозначили основания этих перпендикуляров. Докажите, что отрезок PQ – параллелен стороне АС.

***Решение:***

Продолжим отрезки BQ и BP до пересечения с прямой АС в точках А1 и С1 соответственно. В треугольнике АВС1 отрезок АР является биссектрисой и высотой. Значит треугольник равнобедренный. АВ = АС1. Тогда отрезок АР также является также и медианой. ВР = С1Р (Р – середина ВС1). Аналогично отрезок CQ является медианой треугольника СВА1, то есть Q – середина ВА1. Следовательно РQ – средняя линия треугольника А1ВС1. По свойству средней линии РQ параллельна А1С1. Так как точки А1 и С1 лежат на прямой содержащей сторону АС, значит РQ параллельна АС.

|  |  |
| --- | --- |
|  *Баллы*  | *Критерии оценивания решения*  |
| 7  | Приведено полное логически верное доказательство  |
| 6 - 5 | Доказательство верное, но содержит недостаточно обоснований  |
| 4-3 - 2 | Задача не завершена, но есть верные выводы, свидетельствующие о продвижении в решении задачи.  |
| 1  | Выполнены дополнительные построения и сделан переход к рассмотрению треугольника А1ВС1 |
| 0  | Задача не решена |

**Задача №5**

У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых есть 2 фальшивые – они легче, чем остальные и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?

***Решение:***

*Первое взвешивание.*

1) Кладём на чашки весов по десять монет.

Если одна из чашек оказывается тяжелее, значит, в другой, лёгкой чашке весов одна, фальшивая монета, или же там обе фальшивые монеты. В тяжёлой же чашке весь десяток монет заведомо уже настоящий.

*Второе взвешивание.*

2.1) Убираем лёгкие монеты и кладём на их место другой десяток монет из двадцати оставшихся.

Если равновесие, значит и этот новый десяток - настоящие монеты. Набрано двадцать настоящих монет.

Если новый десяток монет опять оказывается лёгким, значит в него попала последняя фальшивая монета (одна другая фальшивая монета выходит, что попадала в первое взвешивание). Тогда берём оставшийся десяток монет, заведомо уже настоящий. Тоже набираем двадцать настоящих монет.

Если же после первого взвешивания весы показывают равновесие, это означает, что оба десятка этих монет настоящие, или в каждый попало по одной фальшивой монете.

*Второе взвешивание.*

2.2) Заменяем монеты на правой чашке весов на десяток оставшихся монет из двадцати.

Если весы показывают равновесие, то этот десяток монет и два первых десятка монет настоящие, а обе фальшивые остались в последнем не тронутом остатке.

Таким образом, мы имеем уже тридцать настоящих монет.

Если левая чашка перетягивает правую чашку, то значит в правой чашке или одна, или две фальшивые монеты, а левая чашка и та чашка из первого взвешивания - содержит настоящие монеты. Тоже набирается двадцать настоящих монет.

Если же перевешивает правая чашка, это значит, что в ней настоящие монеты и оставшийся десяток тоже настоящие монеты. А вот тогда левая чашка и чашка из первого взвешивания содержали по одной фальшивой монете. Тоже набирается двадцать настоящих монет.

***Возможны и другие способы рассуждений***

|  |  |
| --- | --- |
|  *Баллы*  | *Критерии оценивания решения*  |
| 7  | Полное верное решение. Рассмотрены все случаи |
| 6-5 - 4 |  Решение верное, но недостаточно обосновано |
| 1 – 2 - 3 |  Присутствует идея решения и рассуждений, но решение не учитывает все случаи |
| 0  | Решение отсутствует или логически противоречиво |

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**(Муниципальный этап)**

**9 класс**

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.



Необходимо учитывать следующее:

1. По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;
2. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;
3. Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;
4. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;
5. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
6. Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

**9.1. На доске написано десять чисел. Разрешается выбрать любые три из них (в любом порядке) и прибавить к первому из них число 1, ко второму − число 3, к третьему − число 6. Получившиеся три числа записываются на доску вместо трех выбранных. С новым набором из десяти чисел проделывают аналогичные действия. И т.д. Можно ли за несколько шагов получить набор из десяти равных чисел, если первоначально на доске были написаны числа 1, 2, 3, …, 9, 10?**

**Ответ:** нельзя.

**Решение**: Станем следить за суммой чисел, написанных на доске. При каждом преобразовании эта сумма увеличивается на 1+3+6=10. Первоначально сумма было равна 1+2 + 3+...+9+10=55. Значит, сумма всегда имеет вид 55 +10n, где n − число преобразований набора на доске. Если бы все числа на доске стали равными, скажем, х, то сумма была бы равна 10х, т.е. получили бы 55 +10n =10х , что невозможно, т.к. 55 не делится на 10.

**9.2. Найдите площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника, катеты которого являются корнями уравнения 2**$x^{2}$ **– 6*х* +1 =0.**

**(Указание: Площадь круга радиуса R находится по формуле:** $S=πR^{2}$**).**

**Ответ**: 2$π$ .

**Решение**:

Пусть $x\_{1}$ и $x\_{2}$ – корни уравнения 2$x^{2}$ – 6*х* +1 =0.

Тогда по теореме Виета $x\_{1}+x\_{2}=\frac{6}{2}=3, x\_{1}∙$$x\_{2}=\frac{1}{2}.$

Тогда площадь круга, описанного около прямоугольного треугольника с катетами $x\_{1}$, $x\_{2}$, равна

$πR^{2}=π\left(\frac{\sqrt{x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}}}{2}\right)^{2}=\frac{π}{4}\left(x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}\right)=\frac{π}{4}\left(\left(x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}\right)^{2}-2x\_{1}x\_{2}\right)=\frac{π}{4}\left(3^{2}-1\right)=2π$.

*Комментарий*. Допущена арифметическая ошибка – не более 4 баллов.

**9.3. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а боковая сторона равна 18. К боковым сторонам треугольника проведены высоты. Найдите длину отрезка, концы которого совпадают с основаниями высот.**

****Ответ**: $\frac{28}{3}$

**Решение**:

Пусть *AP* – третья высота треугольника *ABC*. Тогда

*AP* = $\sqrt{AB ^{2}-BP^{2}}=\sqrt{18^{2}-6^{2}}=12\sqrt{2}$

2*S*ABC = *BC⋅* *AP* = *AC⋅*.*BM*.

Отсюда находим, что $ВМ=\frac{ВС∙АР}{АС}=\frac{12∙12\sqrt{2}}{18}=8\sqrt{2}$

*AМ* = $\sqrt{AB ^{2}-BМ^{2}}=\sqrt{324-128}=14$

Из подобия получаем, что $\frac{RM}{BC}=\frac{AM}{AC}$

Следовательно: $RM=\frac{BC∙AM}{AC}=\frac{12∙14}{18}=\frac{28}{3}$

**9.4. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:**

**1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина – на третий;**

**2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.**

**На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа, на второй или на третий?**

**Ответ:** с первого на второй.

**Решение 1**

Предположим, что за весь день на первом этаже в лифт вошло **x** покупателей, на втором – **y**, на третьем – **z**. Заметим, что общее количество покупателей, вышедших из лифта на этажах, равно количеству покупателей, вошедших в лифт на этажах.

По условию, из покупателей, вошедших на втором этаже, половина едет вниз, а половина – вверх. Значит, со второго этажа на третий едет **y/2**покупателей, и столько же со второго на первый. Второе условие можно записать так: **z < ⅓ (x + y + z)**. Это равносильно тому, что **2z < x + y**.

С первого этажа на третий было совершено **z – y/2** поездок, так как всего на третьем этаже вышли из лифта **z** человек, а **y/2** из них приехали со второго этажа. А с первого на второй поднимались те покупатели, входившие в лифт на первом этаже, кто не ехал на третий, то есть их было **x – (z – y/2).** Нам нужно сравнить эти два выражения. Но неравенство **z – y/2 < x – (z – y/2)** равносильно уже доказанному неравенству **2z < x + y**. Тем самым мы доказали, что с первого этажа на третий за этот день приехало меньше покупателей, чем с первого на второй.

**Решение 2**

Все поездки разобьём на три группы: поездки на третий этаж, поездки с третьего этажа и поездки между первым и вторым этажом. По условию первая группа составляет менее трети всех поездок. С другой стороны, она количественно равна второй, так как число покупателей, приехавших на третий этаж равно числу уехавших с него. Значит, последняя группа больше первой.

Вычтем из третьей и первой групп равные количества поездок: из третьей – поездки со второго этажа на первый, а из первой – со второго на третий. В результате получим, что поездок с первого этажа на второй больше, чем с первого на третий.

**9.5.** **Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение** $x^{3}y^{5}=3^{50}∙6^{50}∙10^{33}$**?**

**Ответ**: 126.

**Решение**. Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5.

Тогда числа $x^{3}$ и $y^{5}$ можно записать как $x^{3}=2^{a}∙3^{b}∙5^{c}$, $ y^{5}=2^{m}∙3^{n}∙5^{k}$, где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид

 $2^{3a+5m}∙3^{3b+5n}∙5^{3c+5k}=2^{83}∙3^{100}∙5^{33}$, что равносильно системе уравнений $\left\{\begin{array}{c}3a+5m=83\\3b+5n=100\\3c+5k=33\end{array}\right.$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия m ∈{1; 4; 7; 10; 13; 16}, n ∈{2; 5; 8; 11; 14; 17; 20}, k ∈ {0; 3; 6}. Получаем шесть вариантов для первого уравнения, семь для второго и три варианта для третьего. В итоге 6 ∙ 7 ∙ 3 = 126 решений.

*Комментарий.* Составлена система условий – 4 балла. Только верный ответ – 0 баллов*.*

**Задания муниципального этапа**

**всероссийской олимпиады школьников по математике**

**в 2024-2025 учебном году**

**10 класс**

**Критерии оценивания**

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.



1. По кругу стоят несколько человек. Каждый из них сказал: «Один из моих соседей тяжелее меня, а другой – легче меня». Известно, что веса любых двух людей различны. Могло ли случиться, что среди стоящих солгали ровно 2025 человек?

**Ответ.** Нет, такого быть не могло.

**Решение.** Лжецы, очевидно, те, у кого оба соседа легче них (назовем таких лжецов *толстыми*), или оба соседа тяжелее них (назовем таких лжецов *тонкими*). Если двигаться по кругу, начиная с *тонкого* лжеца, то веса людей будут расти до следующего лжеца, и этот лжец, очевидно, будет *толстым*. Аналогично, если начать двигаться с *толстого* лжеца, то веса людей до следующего лжеца будут убывать, и этот следующий лжец будет *тонким*. Таким образом, *толстые* и *тонкие* лжецы в круге чередуются, поэтому их должно быть поровну, а всех лжецов вместе – четное число. Но 2025 – число нечетное, т.е. ситуация невозможна.

*Комментарий*. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов. Выделены две категории лжецов – 1 балл.

1. В равнобедренном треугольнике АВС, АС = СВ, ∠ АСВ = 100°. Точка М внутри треугольника выбрана так, что ∠ МАВ = 30°, ∠ МВА = 20°. Найдите величину угла МСА.

**Ответ.** 20°.

**Решение.** Пусть *AC = BC = a* , тогда:

∠ CAВ = ∠ CВA = 40°.

Тогда из ∆*ACB* по теореме косинусов:

*AB*2 = *a*2 + *a*2 – 2*a*2 cos 100° =

= 2*a*2(1–cos100°) = 2*a*2 · 2 sin250° =

= 4*a*2 sin2 50°, то есть AB = 2*a* sin 50°.

Но тогда из ∆ *AMB* по теореме синусов:



Но в ∆*BCM* : ∠ *BCM* = 20°, *CB = MB = a*, то есть ∠ BCM = ∠ BMC = 80°.

4. ∠ MCA = 100° – 80° = 20°.

*Комментарий*. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов. Доказано, что ∆*BCM* равнобедренный – 4 балла.

1. Докажите, что для любого числа d, не делящегося на 2 и на 5, найдётся число, в десятичной записи которого содержатся одни единицы и которое делится на d.

**Решение.** Рассмотрим числа, в десятичной записи которых содержатся одни единицы: 1, 11, 111, ... Поскольку таких чисел бесконечно много, то среди них найдутся два числа, имеющие одинаковый остаток при делении на d. Разность этих двух чисел будет иметь вид A = 1...10...0, то есть будет записываться несколькими единицами, за которыми следуют нули; кроме того, число A делится на d. По условию d взаимно просто с 10, следовательно, число из одних единиц, полученное из A вычеркиванием нулей, также делится на d.

*Комментарий*. Сформулирована идея о том, что мощность рассматриваемого множества больше числа остатков – 3 балла.

1. Квадратные трёхчлены f(x) и g(x) таковы, что 3f(x)+g(x) и f(x)−g(x) являются квадратными трёхчленами, имеющими ровно по одному корню. Известно, что f(x) имеет два корня. Докажите, что g(x) не имеет корней.

**Решение.** Так как трёхчлен 3f(x)+g(x) имеет ровно один корень, то либо 3f(x)+g(x)⩾0 при любом x, либо 3f(x)+g(x)⩽0 при любом x. Рассмотрим первый случай, второй рассматривается аналогично.

Для трёхчлена f(x)−g(x) также возможны два варианта: либо f(x)−g(x)⩾0 при всех x, либо f(x)−g(x)⩽0 при всех x.

Если f(x)−g(x)⩾0, то

4f(x)=(3f(x)+g(x))+(f(x)−g(x))⩾0,

то есть у f(x) не может быть двух корней. Значит f(x)−g(x)⩽0, следовательно, g(x)−f(x)⩾0.

Тогда

4g(x)=3(g(x)−f(x))+(3f(x)+g(x))⩾0.

Значит, g(x) может иметь корень только если при каком-то x0 одновременно обращаются в 0 выражения g(x0)−f(x0) и 3f(x0)+g(x0), то есть x0 является одновременно корнем трёхчленов g(x) и f(x).

Поскольку x0 является единственным корнем g(x), то вершина параболы y=g(x) имеет абсциссу x0. Аналогично, поскольку g(x)−f(x) — квадратный трёхчлен, имеющий ровно один корень x0, то вершина параболы y=g(x)−f(x) также имеет абсциссу x0. Но тогда и вершина параболы y=f(x) имеет абсциссу x0, поэтому f(x) имеет единственный корень x0, что противоречит условию.

*Комментарий*. Сформулирована идея о неотрицательности / неположительности многочленов (3f(x)+g(x)) и (f(x)−g(x)) – 2 балла.

1. Казино «У Сысолы» предлагает игру по таким правилам. Игрок ставит любое целое число фишек (но не больше, чем у него в этот момент есть) либо на орла, либо на решку. Затем подбрасывается монета. Если игрок угадал, как она упадёт, он получает назад свою ставку и столько же монет впридачу. Если не угадал – ставку забирает казино. Если игроку не повезёт четыре раза подряд, казино присуждает ему в следующей игре «утешительную победу» вне зависимости от того, как упадёт монета. Вася пришёл в казино со 100 фишками. Он обязался сделать ровно пять ставок и ни разу не ставить больше 17 фишек. Какая наибольшая сумма фишек гарантированно останется у него после игры?

**Ответ.** 98.

**Решение.** Главные наблюдения в этой задаче:

1. Один раз из пяти игрок гарантированно выиграет: либо угадает, либо получит «утешительную победу». Больше – не гарантировано.
2. Как только игрок один раз угадает, как упадёт монетка — все оставшиеся игры он может не угадать. Поэтому для максимизации гарантированного выигрыша все ставки после победы необходимо минимизировать, то есть надо ставить по 1 фишке.

Для начала покажем, что уйти, потеряв 1 фишку или меньше, игроку не удастся. От противного – посмотрим, что для этого ему пришлось бы делать:

* В первый раз игроку придётся поставить не менее 3 фишек, потому что он может выиграть эту игру и проиграть 4 следующие.
* Если он проиграл в первой игре, то во второй ему придется поставить не менее 5 фишек: ведь он может выиграть только эту партию, а проиграть минимум 3 фишек на предыдущей и ещё минимум 3 на следующих трёх.
* Если он проиграл и вторую игру, то на третьей его ставка должна быть уже минимум 9 фишек: если выиграет, то ему надо компенсировать минимум 10 фишек от поражений (3 за первую игру, 5 за вторую, по 1 за четвёртую и пятую).
* Если он проиграл и третью игру, то на четвёртой ему придётся поставить уже минимум 17 фишек: выигрыш должен компенсировать минимум 3 + 5 + 9 + 1 = 18 фишек от поражений.
* Если он проиграл и четвёртую игру, то он уже проиграл минимум 3 + 5 + 9 + 17 = 34 фишек и даже максимальной ставкой в 17 фишек он не сможет компенсировать себе убыток.

Теперь докажем, что игрок может ставить так, чтобы уйти, потеряв всего 2 фишки. Аналогично предыдущим рассуждениям, понимаем, что пока игрок проигрывает, он должен ставить 2, затем 3, 5, 9 и 17 фишек, а как только выиграет – все следующие партии ставить по 1 фишке. Несложно проверить, что в каждой ситуации игрок потеряет не более 2 фишек.

*Комментарий*. Сформулированы только «главные наблюдения» – 1 балл. Не доказана оценка – 3 балла. Показана оценка, правильно выстроен алгоритм игры, но сделаны ошибки в расчетах – 4 балла.

**Задания муниципального этапа**

**всероссийской олимпиады школьников по математике**

**в 2024-2025 учебном году**

**11 класс**

**Критерии оценивания**

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.



1. В усть-сысольской летописи 1608 года найдена странная запись:

$\sqrt{1+2025\sqrt{1+2024\sqrt{1+2023\sqrt{1+... \sqrt{1+1611\sqrt{1+1610×1608}}}}}}$ . Вычислите значение выражения из летописи.

**Ответ**. 2024.

**Решение**. Заметим, что $1609^{2}-1=1610×1608$, то есть

$$1609=\sqrt{1+1610×1608},$$

$$1610=\sqrt{1+1611×1609}=\sqrt{1+1611×\sqrt{1+1610×1608}},$$

$$1611=\sqrt{1+1612×1610}=\sqrt{1+1612×\sqrt{1+1611×\sqrt{1+1610×1608}}},$$

…

$$2024=\sqrt{1+2025\sqrt{1+2024\sqrt{1+...\sqrt{1+1611\sqrt{1+1610×1608}}}}}.$$

*Комментарий*. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов.

1. Найдите количество способов расставить 8 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая свободная клетка доски была побита хотя бы одной ладьёй.

**Ответ.** 2⋅88 −8!

**Решение**. Предположим, что в какой-то горизонтали не стоит ни одной ладьи. Все клетки этой горизонтали должны биться какими-то ладьями, значит, в каждой вертикали должно стоять по ладье. Таким образом, либо во всех горизонталях стоит по одной ладье, либо во всех вертикалях стоит по одной ладье.

Посчитаем количество способов поставить 8 ладей так, чтобы в каждой горизонтали стояло по одной ладье. Ладью на первую горизонталь можно поставить одним из 8 способов (в любую из 8 клеток), на вторую горизонталь — тоже любым из 8 способов, независимо от постановки первой ладьи, и так далее. Значит, всего способов 88. Количество способов поставить ладьи так, чтобы в каждой вертикали стояло по одной ладье, также равно 88.

Сложим эти количества вариантов. Заметим, что дважды будут посчитаны те и только те варианты, когда и в каждой строке, и в каждом столбце стоит по одной ладье. Таких способов ровно 8!

Значит, общее количество способов равно 2⋅88 −8!

*Комментарий*. Сформулирован общий принцип подсчета, но получен неправильный ответ – 2 балла.

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если сумма катетов треугольника равна *d*.

**Ответ**. .

**Решение.**

В четырехугольнике *AOBC* сумма углов *O* и *C* равна 1800, значит, около этого четырехугольника можно описать окружность (рис. 1). Тогда ∠ *ACO* = ∠ *ABO* = 450, ∠ *AOC* = ∠ *ABC* (вписанные в окружность и опираются, соответственно, на равные дуги).

Тогда ∆ *CAO* ~ ∆ *CKB* по двум углам (∠ *ACO* = ∠ *KCB*, ∠ *AOC* = ∠ *KBC*).

Следовательно, .





*Рис 1. Рис 2.*

Пусть *CB =a*, *CA = b*. Найдем *СК* (рис. 2). Если провести *AL* || *CK*, то из прямоугольного равнобедренного треугольника *ACL* получаем: *AL = b*.

Из подобия треугольников *BAL* и *BKC* (по двум углам, ∠ *B* – общий, ∠ *ALC* = ∠ *KCB* как соответственные при двух параллельных прямых и секущей) следует: , . Следовательно, .

Учитывая, что по условию *a + b = d*, получаем:

.

*Комментарий*. Доказано подобие треугольников – 2 балла.

1. На острове рыцарей и лжецов 1001 посёлок. В каждом посёлке живут либо только рыцари, либо только лжецы. Некоторые посёлки соединены дорогами, причём от любого посёлка можно добраться до любого другого, а всего на острове ровно 1000 дорог. Жители каждого из посёлков сделали следующие утверждения:
2. От нашего посёлка ведут дороги хотя бы в три других посёлка.
3. От нашего посёлка ведут дороги хотя бы в два посёлка лжецов.

Какое наименьшее количество посёлков лжецов может быть на острове?

**Ответ**. 601 посёлок.

**Решение.** Приведём пример, когда посёлков лжецов ровно 601. Будем строить его пошагово. Вначале рассмотрим два посёлка рыцарей, соединённых между собой и четыре посёлка лжецов, по два на каждый посёлок рыцарей. Далее на каждом шаге будем заменять один из посёлков лжецов на такую же конструкцию, т.е. прибавлять два посёлка рыцарей и три посёлка лжецов. Таким образом, количество посёлков рыцарей будет равно 2(k+1), а количество посёлков — 3(k+1)+1, где k — количество совершённых операций. При k=199 получим 400 посёлков рыцарей и 601 посёлок лжецов.

Оценка. Докажем, что меньшего количества посёлков лжецов быть не может. Заметим, что посёлки лжецов могут быть соседними только с одним или двумя другими посёлками. Обозначим за a количество посёлков лжецов, соединённых с одним другим посёлком, за b — количество посёлков лжецов, соединённых с двумя другими посёлками, а за c — количество посёлков рыцарей.

Просуммируем количество дорог, выходящих из посёлков. Так как дорог ровно 1000, то эта сумма будет равна равна 2000, то есть a+2b+3c⩽2000. Обозначим за s количество дорог между посёлками рыцарей и лжецов. Так как из каждого посёлка рыцарей выходит хотя бы две дороги в посёлки лжецов, то s⩾2c. С другой стороны, a+2b⩾s. Таким образом, a+2b⩾s⩾2c. Подставляя это неравенство в предыдущее, получаем

2000⩾a+2b+3c⩾5c,

откуда c⩽400. Раз посёлков рыцарей на острове не больше 400, то посёлков лжецов – не меньше, чем 1001–400=601.

*Комментарий*. Верный ответ без объяснения – 0 баллов. Показана оценка – 4 балла.

1. На координатной плоскости нарисовано n парабол, являющихся графиками квадратных трёхчленов; никакие две из них не касаются. Они делят плоскость на несколько областей, одна из которых расположена над всеми параболами. Докажите, что у границы этой области не более 2(n–1) «углов» (то есть точек пересечения пары парабол).

**Решение.** Индукция по n. База. При n = 1 утверждение очевидно.

Шаг индукции. Пусть f1(x), f2(x), ..., fn(x) – данные квадратные трёхчлены (n ≥ 2), причём fn(x) – трёхчлен с минимальным старшим членом (если таких несколько, то любой из них). Обозначим границу нашей области через T. Можно считать, что T содержит участки всех графиков.

Пусть S – множество всех таких чисел *a*, что точка множества T с абсциссой *a* лежит на графике трёхчлена fn(*x*). Иначе говоря, число a принадлежит S тогда и только тогда, когда выполнены неравенства fn(*a*) ≥ fi(*a*) при всех i = 1, 2, ..., n – 1. Обозначим через S*i* множество всех решений i-го неравенства; тогда $S=S\_{1}∩S\_{2}∩…∩S\_{n-1}$. Поскольку каждый трёхчлен $f\_{n}(x) – f\_{i}(x)$ либо обладает отрицательным старшим коэффициентом, либо является на самом деле линейным, S*i* – это либо отрезок (возможно, вырожденный), либо луч, либо вся прямая. Значит, и S является множеством такого же вида.

Итак, у T *не более* двух «углов», принадлежащих графику fn(*x*). Если мы удалим этот график, исчезнут эти углы (и, возможно, появятся новые). При этом по предположению индукции у новой области будет *не более* 2(n – 2) «углов»; значит, исходная имела не более 2(n – 2) + 2 = 2(n – 1) «углов».

*Комментарий*. Показано, что множество всех значений х, при которых точка множества T лежит на графике трёхчлена fn(*x*), есть отрезок, луч или прямая – 3 балла.